|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | | | |
| Федеральное государственное бюджетное  образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» | | | |
|  | | | |
| Кафедра прикладной математики | | | |
|  | | | |
| Практическая работа № 3 по дисциплине | | | |
| «Численное моделирование динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями» | | | |
| **Методы Рунге-Кутты** | | | |
|  | | | |
|  | Группа | ПМ-04 |
|  |  |
| Студенты | Ежов Виктор |
|  | сальников дмитрий |
|  | Проничев Дмитрий |
| Преподаватель | ВАгин денис владимирович |
| Дата | 18.10.2022 |
|  | | | |
| Новосибирск | | | |

1. **Условие задания**

Часть 1

На трёх сетках решить задачу , с помощью классического явного четырёхэтапного метода Рунге-Кутты

Часть 2

Решить задачу , с помощью:

* 1. Простых методов Эйлера (явный и неявный),
  2. Модифицированного метода Эйлера и метода Трапеции,
  3. Метода Рунге-Кутты 4-го порядка

1. **Математическая модель**

Часть 1

Решим дифференциальное уравнение методом Рунге-Кутты.

Пусть f – функция из правой части уравнения, т.е.

***Формулы классического явного четырёхэтапного метода Рунге-Кутты***

Полученные значения будем сравнивать с точным значением функции

Для нахождения y\* решим задачу другим способом:

Из начального условия () следует, что коэфициент C = 1. Поэтому значение функции можно найти по формуле:

Часть 2

Реализуем неявные методы с помощью метода Ньютона:

*Для метода Эйлера:*

*Для метода Трапеции:*

Полученные значения будем сравнивать с точным значением функции

Из начального условия () следует, что коэфициент C = 1. Поэтому значение функции можно найти по формуле:

1. **Реализация методов**

*Часть 1*

#include <iostream>

#include <fstream>

#include <iomanip>

using namespace std;

typedef double type;

inline type function(type t, type y)

{

return 2 \* t \* y;

}

void main(void)

{

ofstream out("OutRunge.txt");

const type Gird[3] = { 0.1,0.05, 0.025 };

for (size\_t i = 0; i < 3; ++i)

{

type h = Gird[i];

type t = 0;

const int n = static\_cast<int> (1 / h);

type\* y = new type[n + 1];

y[0] = 1;

out << endl << "\*\*\*\*\*\*Step: " << setprecision(15) << h << "\*\*\*\*\*\*" << endl;

out << "h\t" << "Runge" << endl;

out << 0 << "\t" << 1 << endl;

for (size\_t i = 1; i <= n; ++i) {

const type current\_y = y[i - 1];

type k1 = function(t, current\_y);

type k2 = function(t + h / 2, current\_y + k1 \* h / 2);

type k3 = function(t + h / 2, current\_y + k2 \* h / 2);

type k4 = function(t + h, current\_y + h \* k3);

type k = (k1 + 2 \* k2 + 2 \* k3 + k4) / 6;

y[i] = current\_y + h \* k;

t = i \* h;

out << t << "\t" << y[i] << endl;

}

delete[] y;

}

out.close();

}

*Часть 2*

#include <iostream>

using namespace std;

typedef double type;

type function(type t, type y) {

return -25 \* y + cos(t) + 25 \* sin(t);

}

int main()

{

setlocale(LC\_ALL, "ru");

type t = 0;

type y = 1;

cout.setf(ios::fixed);

cout.precision(15);

cout << "Введите h: " << endl;

type h;

cin >> h;

type n = 2 / h;

type k, k1, k2, k3, k4;

cout << "[1] - Простой явный метод Эйлера" << endl

<< "[2] - Модифицированный метод Эйлера" << endl

<< "[3] - Простой неявный метод Эйлера" << endl

<< "[4] - Метод Трапеции" << endl

<< "[5] - Рунге-Кутты" << endl;

cout << "Выберете метод: " << endl;

int input;

cin >> input;

switch (input)

{

// Простой явный

case 1:

for (int i = 1; i <= n; i++) {

y = y + h \* function(t, y);

t = t + h;

cout << y << endl;

}

break;

// Модиф. эйлер

case 2:

for (int i = 1; i <= n; i++) {

y = y + h / 2 \* (function(t, y) + function(h \* i, (y + h \* function(t, y))));

t = t + h;

cout << y << endl;

}

break;

// Простой неявный

case 3:

for (int i = 1; i <= n; i++)

{

t = h \* i;

k = y + h \* function(t, y);

k1 = k - (y + h \* function(t, k) - k) / (-25 \* h - 1);

while (abs(k1 - k) > 1e-14)

{

k = k1;

k1 = k - (y + h \* function(t, k) - k) / (-25 \* h - 1);

}

y = k1;

cout << y << "\n";

}

break;

case 4:

// Трапеция

for (int i = 1; i <= n; i++)

{

k = y + h \* function(t, y);

k1 = k - (y + h / 2 \* (function(t, y) + function(i \* h, k)) - k) / ((-25 \* h) / 2 - 1);

while (abs(k1 - k) > 1e-5)

{

k = k1;

k1 = k - (y + h / 2 \* (function(t, y) + function(i \* h, k)) - k) / ((-25 \* h) / 2 - 1);

}

y = k1;

t = h \* i;

cout << y << "\n";

}

break;

// Рунге-Кутты

case 5:

for (int i = 1; i <= n; i++)

{

k1 = function(t, y);

k2 = function(t + h / 2, y + h \* k1 / 2);

k3 = function(t + h / 2, y + h \* k2 / 2);

k4 = function(t + h, y + h \* k3);

k = (k1 + 2 \* k2 + 2 \* k3 + k4) / 6;

y = y + h \* k;

k = 0;

t = h \* i;

cout << y << endl;

}

break;

default:

break;

}

}

1. **Результаты**

*Часть 1*

**h = 0.1**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | Runge\_numerically | Runge\_analytically | | y\_числ - y\_аналит| |
| 0 | 1 | 1 | 0E+00 |
| 0.1 | 1.01005016666667 | 1.01005016708417 | 4.174980361426610E-10 |
| 0.2 | 1.04081076976892 | 1.04081077419239 | 4.423468258352160E-09 |
| 0.3 | 1.09417426547997 | 1.09417428370521 | 1.822524042793820E-08 |
| 0.4 | 1.17351081360029 | 1.17351087099181 | 5.739152020289850E-08 |
| 0.5 | 1.28402525566245 | 1.28402541668774 | 1.610252913231140E-07 |
| 0.6 | 1.43332899453742 | 1.43332941456034 | 4.200229202222520E-07 |
| 0.7 | 1.63231518741329 | 1.63231621995538 | 1.032542088941210E-06 |
| 0.8 | 1.89647846729554 | 1.89648087930495 | 2.412009411756340E-06 |
| 0.9 | 2.24790259024642 | 2.24790798667647 | 5.396430051707310E-06 |
| 1 | 2.71827017538354 | 2.71828182845905 | 1.165307550499150E-05 |

**h = 0.05**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | Runge\_numerically | Runge\_analytically | | y\_числ - y\_аналит| |
| 0 | 1 | 1 | 0E+00 |
| 0.05 | 1.00250312760417 | 1.00250312760580 | 1.62514446344630E-12 |
| 0.1 | 1.01005016706764 | 1.01005016708417 | 1.65278901675947E-11 |
| 0.15 | 1.02275503410404 | 1.02275503416445 | 6.04061245468301E-11 |
| 0.2 | 1.04081077403532 | 1.04081077419239 | 1.57068136275029E-10 |
| 0.25 | 1.06449445856980 | 1.06449445891786 | 3.48059359112085E-10 |
| 0.3 | 1.09417428299764 | 1.09417428370521 | 7.07570446678574E-10 |
| 0.35 | 1.13031911870969 | 1.13031912007401 | 1.36432110053875E-09 |
| 0.4 | 1.17351086845851 | 1.17351087099181 | 2.53330023625153E-09 |
| 0.45 | 1.22446008056100 | 1.22446008512191 | 4.56091475697917E-09 |
| 0.5 | 1.28402540869849 | 1.28402541668774 | 7.98925148259855E-09 |
| 0.55 | 1.35323766277436 | 1.35323767642117 | 1.36468121247901E-08 |
| 0.6 | 1.43332939178408 | 1.43332941456034 | 2.27762602111881E-08 |
| 0.65 | 1.52577118238939 | 1.52577121960346 | 3.72140716020652E-08 |
| 0.7 | 1.63231616031320 | 1.63231621995538 | 5.96421789733625E-08 |
| 0.75 | 1.75505456301980 | 1.75505465696030 | 9.39404984912073E-08 |
| 0.8 | 1.89648073362525 | 1.89648087930495 | 1.45679701635260E-07 |
| 0.85 | 2.05957549631792 | 2.05957571912771 | 2.22809792838063E-07 |
| 0.9 | 2.24790765005480 | 2.24790798667647 | 3.36621671870319E-07 |
| 0.95 | 2.46575930851396 | 2.46575981160379 | 5.03089826242586E-07 |
| 1 | 2.71828108371187 | 2.71828182845905 | 7.44747175041027E-07 |

**h = 0.025**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | Runge\_numerically | Runge\_analytically | | y\_числ - y\_аналит| |
| 0 | 1 | 1 | 0E+00 |
| 0.025 | 1.00062519535319 | 1.00062519535320 | 6.43929354282591E-15 |
| 0.05 | 1.00250312760573 | 1.00250312760580 | 6.52811138479592E-14 |
| 0.075 | 1.00564085001712 | 1.00564085001735 | 2.26707541628457E-13 |
| 0.1 | 1.01005016708361 | 1.01005016708417 | 5.57998092176604E-13 |
| 0.125 | 1.01574770858556 | 1.01574770858669 | 1.12576614696991E-12 |
| 0.15 | 1.02275503416240 | 1.02275503416445 | 2.04591898977924E-12 |
| 0.175 | 1.03109876933636 | 1.03109876933982 | 3.46478401525019E-12 |
| 0.2 | 1.04081077418680 | 1.04081077419239 | 5.58819657214826E-12 |
| 0.225 | 1.05192834617169 | 1.05192834618043 | 8.73812133761476E-12 |
| 0.25 | 1.06449445890453 | 1.06449445891786 | 1.33293376336496E-11 |
| 0.275 | 1.07855803902709 | 1.07855803904705 | 1.99589234028963E-11 |
| 0.3 | 1.09417428367581 | 1.09417428370521 | 2.94004820489135E-11 |
| 0.325 | 1.11140502142532 | 1.11140502146805 | 4.27256008350696E-11 |
| 0.35 | 1.13031912001269 | 1.13031912007401 | 6.13209483191213E-11 |
| 0.375 | 1.15099294460421 | 1.15099294469118 | 8.69664340541476E-11 |
| 0.4 | 1.17351087086984 | 1.17351087099181 | 1.21970211708344E-10 |
| 0.425 | 1.19796585768474 | 1.19796585785400 | 1.69259939397648E-10 |
| 0.45 | 1.22446008488939 | 1.22446008512191 | 2.32524666188283E-10 |
| 0.475 | 1.25310566221837 | 1.25310566253473 | 3.16359827223778E-10 |
| 0.5 | 1.28402541626124 | 1.28402541668774 | 4.26501500783161E-10 |
| 0.525 | 1.31735376315786 | 1.31735376372789 | 5.70029357049862E-10 |
| 0.55 | 1.35323767566553 | 1.35323767642117 | 7.55642215466423E-10 |
| 0.575 | 1.39183775428014 | 1.39183775527414 | 9.94000215470692E-10 |
| 0.6 | 1.43332941326222 | 1.43332941456034 | 1.29812005589258E-09 |
| 0.625 | 1.47790419372795 | 1.47790419541174 | 1.68378844200845E-09 |
| 0.65 | 1.52577121743329 | 1.52577121960346 | 2.17017159798161E-09 |
| 0.675 | 1.57715879652848 | 1.57715879930890 | 2.78041611956326E-09 |
| 0.7 | 1.63231621641294 | 1.63231621995538 | 3.54243900879680E-09 |
| 0.725 | 1.69151571090603 | 1.69151571539587 | 4.48983783485346E-09 |
| 0.75 | 1.75505465129737 | 1.75505465696030 | 5.66292857051565E-09 |
| 0.775 | 1.82325797348740 | 1.82325798059749 | 7.11008518727851E-09 |
| 0.8 | 1.89648087041579 | 1.89648087930495 | 8.88916162899989E-09 |
| 0.825 | 1.97511178034707 | 1.97511179141642 | 1.10693458843514E-08 |
| 0.85 | 2.05957570539449 | 2.05957571912771 | 1.37332225591535E-08 |
| 0.875 | 2.15033789897300 | 2.15033791595230 | 1.69793001880691E-08 |
| 0.9 | 2.24790796575157 | 2.24790798667647 | 2.09249018112700E-08 |
| 0.925 | 2.35284442320155 | 2.35284444891126 | 2.57097130251793E-08 |
| 0.95 | 2.46575978010390 | 2.46575981160379 | 3.14998862549487E-08 |
| 0.975 | 2.58732619448665 | 2.58732623297957 | 3.84929155217151E-08 |
| 1 | 2.71828178153563 | 2.71828182845905 | 4.69234149313991E-08 |

Т.к. метод устойчив на заданных шагах, то порядок сходимости равен порядку аппроксимации.

При уменьшении шага в 2 раза погрешность уменьшается примерно в 4 раза порядок аппроксимации метода равен 4.

*Часть 2*

1. *Простой явный метод Эйлера*

**h = 0.1**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | y\_числ | y\_аналит | | y\_числ - y\_аналит| |
| 0 | 1 | 1 | 0.E+00 |
| 0.1 | -1.40000000000000 | 0.18191841527073 | 1.58191841527073E+00 |
| 0.2 | 2.44908395814487 | 0.20540727779415 | 2.24367668035072E+00 |
| 0.3 | -3.07894595244553 | 0.29607329103149 | 3.37501924347702E+00 |
| 0.4 | 5.45275309423421 | 0.38946374223841 | 5.06328935199580E+00 |
| 0.5 | -7.11347768617940 | 0.47942926525738 | 7.59290695143677E+00 |
| 0.6 | 11.95653863196860 | 0.56464277929736 | 1.13918958526712E+01 |
| 0.7 | -16.44066820297440 | 0.64421771234768 | 1.70848859153221E+01 |
| 0.8 | 26.34803074128430 | 0.71735609296068 | 2.56306746483236E+01 |
| 0.9 | -37.65898521374290 | 0.78332690979667 | 3.84423121235396E+01 |
| 1.0 | 58.50895609151020 | 0.84147098482178 | 5.76674851066884E+01 |
| 1.1 | -85.60572644465870 | 0.89120736006258 | 8.64969338047213E+01 |
| 1.2 | 130.68196767928400 | 0.93203908596732 | 1.29749928593317E+02 |
| 1.3 | -193.65661802856000 | 0.96355818541720 | 1.94620176213977E+02 |
| 1.4 | 292.92057238924600 | 0.98544972998846 | 2.91935122659258E+02 |
| 1.5 | -436.90023754460800 | 0.99749498660405 | 4.37897732531212E+02 |
| 1.6 | 657.85116750359000 | 0.99957360304151 | 6.56851593900548E+02 |
| 1.7 | -984.28073720001200 | 0.99166481045247 | 9.85272402010464E+02 |
| 1.8 | 1478.88738337672000 | 0.97384763087820 | 1.47791353574584E+03 |
| 1.9 | -2215.91917619735000 | 0.94630008768741 | 2.21686547628504E+03 |
| 2.0 | 3326.21218555856000 | 0.90929742682568 | 3.32530288813173E+03 |

**h = 0.05**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | y\_числ | y\_аналит | | y\_числ - y\_аналит| |
| 0 | 1 | 1 | 0.E+00 |
| 0.05 | -0.20000000000000 | 0.33648396613087 | 5.36483966130868E-01 |
| 0.10 | 0.16241147460810 | 0.18191841527073 | 1.95069406626310E-02 |
| 0.15 | 0.13393911042041 | 0.17295587832961 | 3.90167679091963E-02 |
| 0.20 | 0.20275144188370 | 0.20540727779415 | 2.65583591044868E-03 |
| 0.25 | 0.24665213191496 | 0.24933441339075 | 2.68228147578667E-03 |
| 0.30 | 0.29603753717495 | 0.29607329103149 | 3.57538565423643E-05 |
| 0.35 | 0.34315769848922 | 0.34305626878057 | 1.01429708651901E-04 |
| 0.40 | 0.38980147033938 | 0.38946374223841 | 3.37728100966050E-04 |
| 0.45 | 0.43537561000111 | 0.43497854140888 | 3.97068592228766E-04 |
| 0.50 | 0.47988537025639 | 0.47942926525738 | 4.56104999017992E-04 |
| 0.55 | 0.52318970878567 | 0.52268829663467 | 5.01412151004854E-04 |
| 0.60 | 0.56518783506988 | 0.56464277929736 | 5.45055772525171E-04 |
| 0.65 | 0.60577291372181 | 0.60518649337852 | 5.86420343286265E-04 |
| 0.70 | 0.64484396866705 | 0.64421771234768 | 6.26256319367302E-04 |
| 0.75 | 0.68230322624458 | 0.68163876721747 | 6.64459027108655E-04 |
| 0.80 | 0.71805708691172 | 0.71735609296068 | 7.00993951038509E-04 |
| 0.85 | 0.75201617736383 | 0.75128040573082 | 7.35771633009752E-04 |
| 0.90 | 0.78409561937866 | 0.78332690979667 | 7.68709581983718E-04 |
| 0.95 | 0.81421523060322 | 0.81341550483785 | 7.99725765376347E-04 |
| 1.00 | 0.84229972780911 | 0.84147098482179 | 8.28742987321496E-04 |
| 1.05 | 0.86827891435100 | 0.86742322559800 | 8.55688753005013E-04 |
| 1.10 | 0.89208785579936 | 0.89120736006258 | 8.80495736781506E-04 |
| 1.15 | 0.91366704219823 | 0.91276394026085 | 9.03101937386186E-04 |
| 1.20 | 0.93296253682030 | 0.93203908596732 | 9.23450852980845E-04 |
| 1.25 | 0.94992611097779 | 0.94898461935561 | 9.41491622178936E-04 |
| 1.30 | 0.96451536456980 | 0.96355818541720 | 9.57179152597298E-04 |
| 1.35 | 0.97669383206027 | 0.97572335782666 | 9.70474233609631E-04 |
| 1.40 | 0.98643107362291 | 0.98544972998846 | 9.81343634447129E-04 |
| 1.45 | 0.99370275122486 | 0.99271299103759 | 9.89760187271149E-04 |
| 1.50 | 0.99849068945914 | 0.99749498660405 | 9.95702855084546E-04 |
| 1.55 | 1.00078292097366 | 0.99978376418936 | 9.99156784303068E-04 |
| 1.60 | 1.00057371638343 | 0.99957360304151 | 1.00011334192496E-03 |
| 1.65 | 0.99786359859096 | 0.99686502845392 | 9.98570137039190E-04 |
| 1.70 | 0.99265934147932 | 0.99166481045247 | 9.94531026853540E-04 |
| 1.75 | 0.98497395298098 | 0.98398594687394 | 9.88006107042305E-04 |
| 1.80 | 0.97482664256470 | 0.97384763087820 | 9.79011686507048E-04 |
| 1.85 | 0.96224277322191 | 0.96127520297530 | 9.67570246614313E-04 |
| 1.90 | 0.94725379807242 | 0.94630008768741 | 9.53710385005913E-04 |
| 1.95 | 0.92989718174799 | 0.92895971500387 | 9.37466744118098E-04 |
| 2.00 | 0.91021630675028 | 0.90929742682568 | 9.18879924593607E-04 |

**h = 0.025**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | y\_числ | y\_аналит | | y\_числ - y\_аналит| |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0.025 | 0.40000000000000 | 0.56025882443370 | 1.60258824433703E-01 |
| 0.05 | 0.19061556035359 | 0.33648396613087 | 1.45868405777280E-01 |
| 0.075 | 0.12768657243664 | 0.22828467411767 | 1.00598101681028E-01 |
| 0.1 | 0.11964325216201 | 0.18191841527073 | 6.22751631087169E-02 |
| 0.125 | 0.13213720909697 | 0.16861166700864 | 3.64744579116631E-02 |
| 0.15 | 0.15227810345787 | 0.17295587832961 | 2.06777748717433E-02 |
| 0.175 | 0.17522239854110 | 0.18669627983603 | 1.14738812949299E-02 |
| 0.2 | 0.19914414892153 | 0.20540727779415 | 6.26312887261365E-03 |
| 0.225 | 0.22334905203852 | 0.22671292526776 | 3.36387322924214E-03 |
| 0.25 | 0.24756722352351 | 0.24933441339075 | 1.76718986724164E-03 |
| 0.275 | 0.27168799389816 | 0.27258023459476 | 8.92240696601432E-04 |
| 0.3 | 0.29566046325009 | 0.29607329103149 | 4.12827781401393E-04 |
| 0.325 | 0.31945621511026 | 0.31960483058706 | 1.48615476797787E-04 |
| 0.35 | 0.34305533998734 | 0.34305626878057 | 9.28793224164171E-07 |
| 0.375 | 0.36644119997610 | 0.36635734732129 | 8.38526548008756E-05 |
| 0.4 | 0.38959847121762 | 0.38946374223841 | 1.34728979209908E-04 |
| 0.425 | 0.41251241549959 | 0.41234508257468 | 1.67332924903840E-04 |
| 0.45 | 0.43516861272584 | 0.43497854140888 | 1.90071316952589E-04 |
| 0.475 | 0.45755286615053 | 0.45734540948368 | 2.07456666845907E-04 |
| 0.5 | 0.47965117233387 | 0.47942926525738 | 2.21907076497829E-04 |
| 0.525 | 0.50144971530009 | 0.50121499940750 | 2.34715892590609E-04 |
| 0.55 | 0.52293486969923 | 0.52268829663467 | 2.46573064561662E-04 |
| 0.575 | 0.54409320727036 | 0.54383536218442 | 2.57845085944730E-04 |
| 0.6 | 0.56491150446418 | 0.56464277929736 | 2.68725166822081E-04 |
| 0.625 | 0.58537675041871 | 0.58509743667818 | 2.79313740530585E-04 |
| 0.65 | 0.60547615498243 | 0.60518649337852 | 2.89661603912084E-04 |
| 0.675 | 0.62519715666716 | 0.62489736363934 | 2.99793027823791E-04 |
| 0.7 | 0.64452743048331 | 0.64421771234768 | 3.09718135627191E-04 |
| 0.725 | 0.66345489563691 | 0.66313545610376 | 3.19439533151167E-04 |
| 0.75 | 0.68196772307759 | 0.68163876721747 | 3.28955860121494E-04 |
| 0.775 | 0.70005434289053 | 0.69971607919735 | 3.38263693179242E-04 |
| 0.8 | 0.71770345152697 | 0.71735609296068 | 3.47358566296418E-04 |
| 0.825 | 0.73490401886850 | 0.73454778334984 | 3.56235518661152E-04 |
| 0.85 | 0.75164529512039 | 0.75128040573082 | 3.64889389570688E-04 |
| 0.875 | 0.76791681752996 | 0.76754350255212 | 3.73314977839545E-04 |
| 0.9 | 0.78370841692533 | 0.78332690979667 | 3.81507128660585E-04 |
| 0.925 | 0.79901022407094 | 0.79862076328938 | 3.89460781568762E-04 |
| 0.95 | 0.81381267583542 | 0.81341550483785 | 3.97170997568308E-04 |
| 0.975 | 0.82810652116824 | 0.82770188819320 | 4.04632975032904E-04 |
| 1 | 0.84188282688136 | 0.84147098482179 | 4.11842059574341E-04 |
| 1.025 | 0.85513298323215 | 0.85471418948153 | 4.18793750620705E-04 |
| 1.05 | 0.86784870930420 | 0.86742322559800 | 4.25483706201990E-04 |
| 1.075 | 0.88002205818263 | 0.87959015043592 | 4.31907746709204E-04 |
| 1.1 | 0.89164542192065 | 0.89120736006258 | 4.38061858073602E-04 |
| 1.125 | 0.90271153629428 | 0.90226759409971 | 4.43942194574665E-04 |
| 1.15 | 0.91321348534226 | 0.91276394026085 | 4.49545081408376E-04 |
| 1.175 | 0.92314470568828 | 0.92268983867121 | 4.54867017068206E-04 |
| 1.2 | 0.93249899064290 | 0.93203908596732 | 4.59904675577105E-04 |
| 1.225 | 0.94127049408252 | 0.94080583917392 | 4.64654908597928E-04 |
| 1.25 | 0.94945373410302 | 0.94898461935561 | 4.69114747405186E-04 |
| 1.275 | 0.95704359644576 | 0.95657031504100 | 4.73281404754888E-04 |
| 1.3 | 0.96403533769383 | 0.96355818541720 | 4.77152276626480E-04 |
| 1.325 | 0.97042458823655 | 0.96994386329269 | 4.80724943853872E-04 |
| 1.35 | 0.97620735500030 | 0.97572335782666 | 4.83997173638895E-04 |
| 1.375 | 0.98138002394410 | 0.98089305702316 | 4.86966920943188E-04 |
| 1.4 | 0.98593936231824 | 0.98544972998846 | 4.89632329774281E-04 |
| 1.425 | 0.98988252068463 | 0.98939052895030 | 4.91991734336561E-04 |
| 1.45 | 0.99320703469767 | 0.99271299103759 | 4.94043660079435E-04 |
| 1.475 | 0.99591082664430 | 0.99541503981969 | 4.95786824616040E-04 |
| 1.5 | 0.99799220674258 | 0.99749498660405 | 4.97220138526711E-04 |
| 1.525 | 0.99944987419769 | 0.99895153149166 | 4.98342706035326E-04 |
| 1.55 | 1.00028291801493 | 0.99978376418936 | 4.99153825573084E-04 |
| 1.575 | 1.00049081756902 | 0.99999116457880 | 4.99652990216704E-04 |
| 1.6 | 1.00007344292951 | 0.99957360304151 | 4.99839888004727E-04 |
| 1.625 | 0.99903105494198 | 0.99853134053983 | 4.99714402146245E-04 |
| 1.65 | 0.99736430506496 | 0.99686502845392 | 4.99276611043986E-04 |
| 1.675 | 0.99507423496289 | 0.99457570817458 | 4.98526788311970E-04 |
| 1.7 | 0.99216227585503 | 0.99166481045247 | 4.97465402565123E-04 |
| 1.725 | 0.98863024762104 | 0.98813415450391 | 4.96093117135055E-04 |
| 1.75 | 0.98448035766359 | 0.98398594687394 | 4.94410789654731E-04 |
| 1.775 | 0.97971519952882 | 0.97922278005730 | 4.92419471525340E-04 |
| 1.8 | 0.97433775128545 | 0.97384763087820 | 4.90120407254269E-04 |
| 1.825 | 0.96835137366359 | 0.96786385862991 | 4.87515033683272E-04 |
| 1.85 | 0.96175980795439 | 0.96127520297530 | 4.84604979085312E-04 |
| 1.875 | 0.95456717367185 | 0.95408578160970 | 4.81392062150365E-04 |
| 1.9 | 0.94677796597826 | 0.94630008768742 | 4.77878290846667E-04 |
| 1.925 | 0.93839705287490 | 0.93792298701373 | 4.74065861165940E-04 |
| 1.95 | 0.92942967215963 | 0.92895971500387 | 4.69957155754597E-04 |
| 1.975 | 0.91988142815350 | 0.91941587341108 | 4.65554742417718E-04 |
| 2 | 0.90975828819821 | 0.90929742682568 | 4.60861372521992E-04 |

1. *Простой неявный метод Эйлера*

**h = 0.1**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | y\_числ | y\_аналит | | y\_числ - y\_аналит| |
| 0.00 | 1 | 1 | 0.E+00 |
| 0.10 | 0.38545255946996 | 0.18191841527073 | 2.03534144199237E-01 |
| 0.20 | 0.28003786978335 | 0.20540727779415 | 7.46305919892073E-02 |
| 0.30 | 0.31839201009979 | 0.29607329103149 | 2.23187190683026E-02 |
| 0.40 | 0.39544113293477 | 0.38946374223841 | 5.97739069636000E-03 |
| 0.50 | 0.48050378160981 | 0.47942926525738 | 1.07451635242994E-03 |
| 0.60 | 0.56418386473953 | 0.56464277929736 | 4.58914557823875E-04 |
| 0.70 | 0.64320351473206 | 0.64421771234768 | 1.01419761562249E-03 |
| 0.80 | 0.71607554654731 | 0.71735609296068 | 1.28054641336728E-03 |
| 0.90 | 0.78187251926945 | 0.78332690979667 | 1.45439052722007E-03 |
| 1.00 | 0.83988006053600 | 0.84147098482178 | 1.59092428578234E-03 |
| 1.10 | 0.88950230652347 | 0.89120736006258 | 1.70505353910433E-03 |
| 1.20 | 0.93023879911120 | 0.93203908596732 | 1.80028685611888E-03 |
| 1.30 | 0.96168118443333 | 0.96355818541720 | 1.87700098387467E-03 |
| 1.40 | 0.98351492105557 | 0.98544972998846 | 1.93480893288889E-03 |
| 1.50 | 0.99552174506642 | 0.99749498660405 | 1.97324153763245E-03 |
| 1.60 | 0.99758165726859 | 0.99957360304151 | 1.99194577291806E-03 |
| 1.70 | 0.98967406684863 | 0.99166481045247 | 1.99074360383855E-03 |
| 1.80 | 0.97187798130709 | 0.97384763087820 | 1.96964957110701E-03 |
| 1.90 | 0.94437121252551 | 0.94630008768741 | 1.92887516190721E-03 |
| 2.00 | 0.90742859883857 | 0.90929742682568 | 1.86882798711052E-03 |

**h = 0.05**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | y\_числ | y\_аналит | | y\_числ - y\_аналит| |
| 0 | 1 | 1 | 0.E+00 |
| 0.05 | 0.49440509982582 | 0.33648396613087 | 1.57921133694953E-01 |
| 0.1 | 0.29730981284367 | 0.18191841527073 | 1.15391397572943E-01 |
| 0.15 | 0.23713156992554 | 0.17295587832961 | 6.41756915959346E-02 |
| 0.2 | 0.23754291658286 | 0.20540727779415 | 3.21356387887113E-02 |
| 0.25 | 0.26455266077180 | 0.24933441339075 | 1.52182473810464E-02 |
| 0.3 | 0.30298655269100 | 0.29607329103149 | 6.91326165951361E-03 |
| 0.35 | 0.34603442117897 | 0.34305626878057 | 2.97815239840388E-03 |
| 0.4 | 0.39060462167330 | 0.38946374223841 | 1.14087943488805E-03 |
| 0.45 | 0.43525950863554 | 0.43497854140888 | 2.80967226659767E-04 |
| 0.5 | 0.47929802666014 | 0.47942926525738 | 1.31238597235017E-04 |
| 0.55 | 0.52234812841175 | 0.52268829663467 | 3.40168222918047E-04 |
| 0.6 | 0.56418577817824 | 0.56464277929736 | 4.57001119120837E-04 |
| 0.65 | 0.60465465567811 | 0.60518649337852 | 5.31837700415760E-04 |
| 0.7 | 0.64363061070642 | 0.64421771234768 | 5.87101641263632E-04 |
| 0.75 | 0.68100600185746 | 0.68163876721747 | 6.32765360010334E-04 |
| 0.8 | 0.71668286708854 | 0.71735609296068 | 6.73225872134475E-04 |
| 0.85 | 0.75057001369251 | 0.75128040573082 | 7.10392038309249E-04 |
| 0.9 | 0.78258184406240 | 0.78332690979667 | 7.45065734272243E-04 |
| 0.95 | 0.81263794645436 | 0.81341550483785 | 7.77558383486587E-04 |
| 1 | 0.84066301900340 | 0.84147098482179 | 8.07965818389489E-04 |
| 1.05 | 0.86658693484022 | 0.86742322559800 | 8.36290757773028E-04 |
| 1.1 | 0.89034486266147 | 0.89120736006258 | 8.62497401110551E-04 |
| 1.15 | 0.91187740445837 | 0.91276394026085 | 8.86535802481880E-04 |
| 1.2 | 0.93113073317388 | 0.93203908596732 | 9.08352793439149E-04 |
| 1.25 | 0.94805672243917 | 0.94898461935561 | 9.27896916445015E-04 |
| 1.3 | 0.96261306472973 | 0.96355818541720 | 9.45120687472767E-04 |
| 1.35 | 0.97476337616342 | 0.97572335782666 | 9.59981663237408E-04 |
| 1.4 | 0.98447728701956 | 0.98544972998846 | 9.72442968899867E-04 |
| 1.45 | 0.99173051745996 | 0.99271299103759 | 9.82473577626819E-04 |
| 1.5 | 0.99650493813263 | 0.99749498660405 | 9.90048471425475E-04 |
| 1.55 | 0.99878861544866 | 0.99978376418936 | 9.95148740698948E-04 |
| 1.6 | 0.99857584139354 | 0.99957360304151 | 9.97761647961060E-04 |
| 1.65 | 0.99586714778694 | 0.99686502845392 | 9.97880666982809E-04 |
| 1.7 | 0.99066930495011 | 0.99166481045247 | 9.95505502359495E-04 |
| 1.75 | 0.98299530478225 | 0.98398594687394 | 9.90642091689753E-04 |
| 1.8 | 0.97286432828682 | 0.97384763087820 | 9.83302591378910E-04 |
| 1.85 | 0.96030169762876 | 0.96127520297530 | 9.73505346537618E-04 |
| 1.9 | 0.94533881284216 | 0.94630008768741 | 9.61274845256099E-04 |
| 1.95 | 0.92801307334641 | 0.92895971500387 | 9.46641657455838E-04 |
| 2 | 0.90836778446718 | 0.90929742682568 | 9.29642358499350E-04 |

**h= 0.025**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | y\_числ | y\_аналит | | y\_числ - y\_аналит| |
| 0 | 1 | 1 | 0.E+00 |
| 0.025 | 0.64037880637144 | 0.56025882443370 | 8.01199819377364E-02 |
| 0.05 | 0.42866741149261 | 0.33648396613087 | 9.21834453617386E-02 |
| 0.075 | 0.30795581476362 | 0.22828467411767 | 7.96711406459452E-02 |
| 0.1 | 0.24321649495374 | 0.18191841527073 | 6.12980796830171E-02 |
| 0.125 | 0.21288808923092 | 0.16861166700864 | 4.42764222222849E-02 |
| 0.15 | 0.20369612244635 | 0.17295587832961 | 3.07402441167427E-02 |
| 0.175 | 0.20746576733229 | 0.18669627983603 | 2.07694874962601E-02 |
| 0.2 | 0.21916046986168 | 0.20540727779415 | 1.37531920675363E-02 |
| 0.225 | 0.23567495315123 | 0.22671292526776 | 8.96202788346784E-03 |
| 0.25 | 0.25509245429420 | 0.24933441339075 | 5.75804090344739E-03 |
| 0.275 | 0.27622764297383 | 0.27258023459476 | 3.64740837907057E-03 |
| 0.3 | 0.29834534422481 | 0.29607329103149 | 2.27205319331764E-03 |
| 0.325 | 0.32098744833588 | 0.31960483058706 | 1.38261774881920E-03 |
| 0.35 | 0.34386639742567 | 0.34305626878057 | 8.10128645105823E-04 |
| 0.375 | 0.36679964224755 | 0.36635734732129 | 4.42294926250919E-04 |
| 0.4 | 0.38966931140955 | 0.38946374223841 | 2.05569171139952E-04 |
| 0.425 | 0.41239739589110 | 0.41234508257468 | 5.23133164198608E-05 |
| 0.45 | 0.43493048139658 | 0.43497854140888 | 4.80600123053954E-05 |
| 0.475 | 0.45723035626093 | 0.45734540948368 | 1.15053222753070E-04 |
| 0.5 | 0.47926823503742 | 0.47942926525738 | 1.61030219952174E-04 |
| 0.525 | 0.50102120707638 | 0.50121499940750 | 1.93792331116382E-04 |
| 0.55 | 0.52247005428279 | 0.52268829663467 | 2.18242351881281E-04 |
| 0.575 | 0.54359791139728 | 0.54383536218442 | 2.37450787135329E-04 |
| 0.6 | 0.56438944470272 | 0.56464277929736 | 2.53334594635946E-04 |
| 0.625 | 0.58483034970962 | 0.58509743667818 | 2.67086968551378E-04 |
| 0.65 | 0.60490704508208 | 0.60518649337852 | 2.79448296444884E-04 |
| 0.675 | 0.62460648727089 | 0.62489736363934 | 2.90876368447268E-04 |
| 0.7 | 0.64391605937019 | 0.64421771234768 | 3.01652977490741E-04 |
| 0.725 | 0.66282350559012 | 0.66313545610376 | 3.11950513642745E-04 |
| 0.75 | 0.68131689373941 | 0.68163876721747 | 3.21873478054568E-04 |
| 0.775 | 0.69938459488150 | 0.69971607919735 | 3.31484315844843E-04 |
| 0.8 | 0.71701527349377 | 0.71735609296068 | 3.40819466903564E-04 |
| 0.825 | 0.73419788402368 | 0.73454778334984 | 3.49899326154812E-04 |
| 0.85 | 0.75092167131292 | 0.75128040573082 | 3.58734417907347E-04 |
| 0.875 | 0.76717617333201 | 0.76754350255212 | 3.67329220105406E-04 |
| 0.9 | 0.78295122526520 | 0.78332690979667 | 3.75684531471410E-04 |
| 0.925 | 0.79823696435324 | 0.79862076328938 | 3.83798936136270E-04 |
| 0.95 | 0.81302383512812 | 0.81341550483785 | 3.91669709727704E-04 |
| 0.975 | 0.82730259481316 | 0.82770188819320 | 3.99293380041077E-04 |
| 1 | 0.84106431874757 | 0.84147098482179 | 4.06666074214579E-04 |
| 1.025 | 0.85430040574752 | 0.85471418948153 | 4.13783734011353E-04 |
| 1.05 | 0.86700258334835 | 0.86742322559800 | 4.20642249645997E-04 |
| 1.075 | 0.87916291289262 | 0.87959015043592 | 4.27237543294767E-04 |
| 1.1 | 0.89077379444102 | 0.89120736006258 | 4.33565621553389E-04 |
| 1.125 | 0.90182797149103 | 0.90226759409971 | 4.39622608676360E-04 |
| 1.15 | 0.91231853549290 | 0.91276394026085 | 4.45404767949631E-04 |
| 1.175 | 0.92223893015550 | 0.92268983867121 | 4.50908515704840E-04 |
| 1.2 | 0.93158295553658 | 0.93203908596732 | 4.56130430743884E-04 |
| 1.225 | 0.94034477191302 | 0.94080583917392 | 4.61067260907000E-04 |
| 1.25 | 0.94851890342778 | 0.94898461935561 | 4.65715927835841E-04 |
| 1.275 | 0.95610024151043 | 0.95657031504100 | 4.70073530572046E-04 |
| 1.3 | 0.96308404806879 | 0.96355818541720 | 4.74137348407511E-04 |
| 1.325 | 0.96946595844947 | 0.96994386329269 | 4.77904843221078E-04 |
| 1.35 | 0.97524198416521 | 0.97572335782666 | 4.81373661456064E-04 |
| 1.375 | 0.98040851538732 | 0.98089305702316 | 4.84541635832780E-04 |
| 1.4 | 0.98496232320161 | 0.98544972998846 | 4.87406786849665E-04 |
| 1.425 | 0.98890056162618 | 0.98939052895030 | 4.89967324115437E-04 |
| 1.45 | 0.99222076939007 | 0.99271299103759 | 4.92221647522606E-04 |
| 1.475 | 0.99492087147141 | 0.99541503981969 | 4.94168348280977E-04 |
| 1.5 | 0.99699918039424 | 0.99749498660405 | 4.95806209819372E-04 |
| 1.525 | 0.99845439728310 | 0.99895153149166 | 4.97134208562677E-04 |
| 1.55 | 0.99928561267478 | 0.99978376418936 | 4.98151514573886E-04 |
| 1.575 | 0.99949230708672 | 0.99999116457880 | 4.98857492085225E-04 |
| 1.6 | 0.99907435134162 | 0.99957360304151 | 4.99251699889181E-04 |
| 1.625 | 0.99803200664821 | 0.99853134053983 | 4.99333891623710E-04 |
| 1.65 | 0.99636592443799 | 0.99686502845392 | 4.99104015926011E-04 |
| 1.675 | 0.99407714595812 | 0.99457570817458 | 4.98562216462051E-04 |
| 1.7 | 0.99116710162063 | 0.99166481045247 | 4.97708831838861E-04 |
| 1.725 | 0.98763761010851 | 0.98813415450391 | 4.96544395396925E-04 |
| 1.75 | 0.98349087723907 | 0.98398594687394 | 4.95069634870227E-04 |
| 1.775 | 0.97872949458536 | 0.97922278005730 | 4.93285471936722E-04 |
| 1.8 | 0.97335643785656 | 0.97384763087820 | 4.91193021639691E-04 |
| 1.825 | 0.96737506503821 | 0.96786385862991 | 4.88793591692738E-04 |
| 1.85 | 0.96078911429364 | 0.96127520297530 | 4.86088681661667E-04 |
| 1.875 | 0.95360270162767 | 0.95408578160970 | 4.83079982028567E-04 |
| 1.9 | 0.94582031831429 | 0.94630008768742 | 4.79769373130323E-04 |
| 1.925 | 0.93744682808974 | 0.93792298701373 | 4.76158923992109E-04 |
| 1.95 | 0.92848746411285 | 0.92895971500387 | 4.72250891025427E-04 |
| 1.975 | 0.91894782569445 | 0.91941587341108 | 4.68047716624342E-04 |
| 2 | 0.90883387479805 | 0.90929742682568 | 4.63552027636038E-04 |

1. *Модифицированный метод Эйлера*

**h= 0.2**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | y\_числ | y\_аналит | | y\_числ - y\_аналит| |
| 0 | 1 | 1 | 0.E+00 |
| 0.2 | 8.69467998477177 | 0.20540727779415 | 8.48927270697762E+00 |
| 0.4 | 72.59171188664490 | 0.38946374223841 | 7.22022481444065E+01 |
| 0.6 | 614.26108296077300 | 0.56464277929736 | 6.13696440181476E+02 |
| 0.8 | 5217.10570708484000 | 0.71735609296068 | 5.21638835099188E+03 |
| 1 | 44340.10397432100000 | 0.84147098482178 | 4.43392625033362E+04 |
| 1.2 | 376884.61928444800000 | 0.93203908596732 | 3.76883687245362E+05 |
| 1.4 | 3203512.27920489000000 | 0.98544972998846 | 3.20351129375516E+06 |
| 1.6 | 27229846.94677140000000 | 0.99957360304151 | 2.72298459471978E+07 |
| 1.8 | 231453691.47540000000000 | 0.97384763087820 | 2.31453690501552E+08 |
| 2 | 1967356370.12493000000000 | 0.90929742682568 | 1.96735636921563E+09 |

**h = 0.1**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | y\_числ | y\_аналит | | y\_числ - y\_аналит| |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0.1 | 1.72454197907243 | 0.18191841527073 | 1.54262356380170E+00 |
| 0.2 | 2.83790773976994 | 0.20540727779415 | 2.63250046197579E+00 |
| 0.3 | 4.58275717133028 | 0.29607329103149 | 4.28668388029879E+00 |
| 0.4 | 7.35405575682323 | 0.38946374223841 | 6.96459201458482E+00 |
| 0.5 | 11.79426268980850 | 0.47942926525738 | 1.13148334245511E+01 |
| 0.6 | 18.94800516640350 | 0.56464277929736 | 1.83833623871061E+01 |
| 0.7 | 30.51341780508320 | 0.64421771234768 | 2.98692000927355E+01 |
| 0.8 | 49.25056305473500 | 0.71735609296068 | 4.85332069617743E+01 |
| 0.9 | 79.64510842575470 | 0.78332690979667 | 7.88617815159580E+01 |
| 1 | 128.98679633498200 | 0.84147098482178 | 1.28145325350160E+02 |
| 1.1 | 209.12195228104000 | 0.89120736006258 | 2.08230744920977E+02 |
| 1.2 | 339.30130569265100 | 0.93203908596732 | 3.38369266606684E+02 |
| 1.3 | 550.80769430598700 | 0.96355818541720 | 5.49844136120570E+02 |
| 1.4 | 894.47607975705500 | 0.98544972998846 | 8.93490630027067E+02 |
| 1.5 | 1452.91356941910000 | 0.99749498660405 | 1.45191607443250E+03 |
| 1.6 | 2360.35694894373000 | 0.99957360304151 | 2.35935737534069E+03 |
| 1.7 | 3834.94117028038000 | 0.99166481045247 | 3.83394950546993E+03 |
| 1.8 | 6231.13564295696000 | 0.97384763087820 | 6.23016179532608E+03 |
| 1.9 | 10124.95320628550000 | 0.94630008768741 | 1.01240069061978E+04 |
| 2 | 16452.41470870880000 | 0.90929742682568 | 1.64515054112820E+04 |

**h = 0.05**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | y\_числ | y\_аналит | | y\_числ - y\_аналит| |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0.05 | 0.58120573730405 | 0.33648396613087 | 2.44721771173180E-01 |
| 0.1 | 0.38198510315298 | 0.18191841527073 | 2.00066687882255E-01 |
| 0.15 | 0.29922994841037 | 0.17295587832961 | 1.26274070080760E-01 |
| 0.2 | 0.27810637884985 | 0.20540727779415 | 7.26991010557053E-02 |
| 0.25 | 0.28942679979259 | 0.24933441339075 | 4.00923864018403E-02 |
| 0.3 | 0.31762895751208 | 0.29607329103149 | 2.15556664805926E-02 |
| 0.35 | 0.35438994581127 | 0.34305626878057 | 1.13336770306979E-02 |
| 0.4 | 0.39523378563500 | 0.38946374223841 | 5.77004339659004E-03 |
| 0.45 | 0.43772933779869 | 0.43497854140888 | 2.75079638980175E-03 |
| 0.5 | 0.48053307728585 | 0.47942926525738 | 1.10381202847898E-03 |
| 0.55 | 0.52288069702254 | 0.52268829663467 | 1.92400387868941E-04 |
| 0.6 | 0.56431714875458 | 0.56464277929736 | 3.25630542780897E-04 |
| 0.65 | 0.60455334976346 | 0.60518649337852 | 6.33143615062726E-04 |
| 0.7 | 0.64339017663032 | 0.64421771234768 | 8.27535717363603E-04 |
| 0.75 | 0.68067820076987 | 0.68163876721747 | 9.60566447598343E-04 |
| 0.8 | 0.71629640702077 | 0.71735609296068 | 1.05968593990946E-03 |
| 0.85 | 0.75014099195312 | 0.75128040573082 | 1.13941377770421E-03 |
| 0.9 | 0.78211951173409 | 0.78332690979667 | 1.20739806258630E-03 |
| 0.95 | 0.81214786640770 | 0.81341550483785 | 1.26763843014466E-03 |
| 1 | 0.84014878524824 | 0.84147098482179 | 1.32219957354252E-03 |
| 1.05 | 0.86605110356877 | 0.86742322559800 | 1.37212202922299E-03 |
| 1.1 | 0.88978945379656 | 0.89120736006258 | 1.41790626601646E-03 |
| 1.15 | 0.91130417024584 | 0.91276394026085 | 1.45977001500586E-03 |
| 1.2 | 0.93054130086331 | 0.93203908596732 | 1.49778510401510E-03 |
| 1.25 | 0.94745266909290 | 0.94898461935561 | 1.53195026271802E-03 |
| 1.3 | 0.96199595551768 | 0.96355818541720 | 1.56222989952071E-03 |
| 1.35 | 0.97413478303742 | 0.97572335782666 | 1.58857478924646E-03 |
| 1.4 | 0.98383879684917 | 0.98544972998846 | 1.61093313928695E-03 |
| 1.45 | 0.99108373450498 | 0.99271299103759 | 1.62925653261181E-03 |
| 1.5 | 0.99585148346683 | 0.99749498660405 | 1.64350313722750E-03 |
| 1.55 | 0.99813012473787 | 0.99978376418936 | 1.65363945148700E-03 |
| 1.6 | 0.99791396178205 | 0.99957360304151 | 1.65964125945905E-03 |
| 1.65 | 0.99520353429939 | 0.99686502845392 | 1.66149415452777E-03 |
| 1.7 | 0.99000561663107 | 0.99166481045247 | 1.65919382139545E-03 |
| 1.75 | 0.98233320069638 | 0.98398594687394 | 1.65274617755673E-03 |
| 1.8 | 0.97220546345025 | 0.97384763087820 | 1.64216742794188E-03 |
| 1.85 | 0.95964771891401 | 0.96127520297530 | 1.62748406128965E-03 |
| 1.9 | 0.94469135488388 | 0.94630008768741 | 1.60873280353713E-03 |
| 1.95 | 0.92737375446743 | 0.92895971500387 | 1.58596053643489E-03 |
| 2 | 0.90773820263979 | 0.90929742682568 | 1.55922418589338E-03 |

1. *Метод Трапеции*

**h = 0.2**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | y\_числ | y\_аналит | | y\_числ - y\_аналит| |
| 0 | 1 | 1 | 0.E+00 |
| 0.2 | -0.23009143292235 | 0.20540727779415 | 4.35498710716496E-01 |
| 0.4 | 0.57299116837921 | 0.38946374223841 | 1.83527426140792E-01 |
| 0.6 | 0.48580141359476 | 0.56464277929736 | 7.88413657025950E-02 |
| 0.8 | 0.75099957793427 | 0.71735609296068 | 3.36434849735916E-02 |
| 1 | 0.82693406396819 | 0.84147098482178 | 1.45369208535914E-02 |
| 1.2 | 0.93818288200571 | 0.93203908596732 | 6.14379603839410E-03 |
| 1.4 | 0.98276577331953 | 0.98544972998846 | 2.68395666893584E-03 |
| 1.6 | 1.00071040990157 | 0.99957360304151 | 1.13680686006479E-03 |
| 1.8 | 0.97338494521356 | 0.97384763087820 | 4.62685664639251E-04 |
| 2 | 0.90955723809010 | 0.90929742682568 | 2.59811264414211E-04 |

**h = 0.1**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | y\_числ | y\_аналит | | y\_числ - y\_аналит| |
| 0 | 1 | 1 | 0.E+00 |
| 0.1 | -0.01131467596781 | 0.18191841527073 | 1.93233091238533E-01 |
| 0.2 | 0.21098250686679 | 0.20540727779415 | 5.57522907264330E-03 |
| 0.3 | 0.29411619931207 | 0.29607329103149 | 1.95709171942243E-03 |
| 0.4 | 0.38953956024040 | 0.38946374223841 | 7.58180019849730E-05 |
| 0.5 | 0.47937872838917 | 0.47942926525738 | 5.05368682060525E-05 |
| 0.6 | 0.56461610744078 | 0.56464277929736 | 2.66718565739010E-05 |
| 0.7 | 0.64419113957352 | 0.64421771234768 | 2.65727741615152E-05 |
| 0.8 | 0.71733194782654 | 0.71735609296068 | 2.41451341342902E-05 |
| 0.9 | 0.78330515448134 | 0.78332690979667 | 2.17553153341044E-05 |
| 1 | 0.84145186361370 | 0.84147098482178 | 1.91212080823400E-05 |
| 1.1 | 0.89119106068797 | 0.89120736006258 | 1.62993746082307E-05 |
| 1.2 | 0.93202577162620 | 0.93203908596732 | 1.33143411208403E-05 |
| 1.3 | 0.96354798910179 | 0.96355818541720 | 1.01963154066631E-05 |
| 1.4 | 0.98544275358127 | 0.98544972998846 | 6.97640718994030E-06 |
| 1.5 | 0.99749129981054 | 0.99749498660405 | 3.68679351048229E-06 |
| 1.6 | 0.99957324269895 | 0.99957360304151 | 3.60342556127158E-07 |
| 1.7 | 0.99166778016128 | 0.99166481045247 | 2.96970881541458E-06 |
| 1.8 | 0.97385390096604 | 0.97384763087820 | 6.27008783993244E-06 |
| 1.9 | 0.94630959550563 | 0.94630008768741 | 9.50781821873470E-06 |
| 2 | 0.90931007737530 | 0.90929742682568 | 1.26505496205187E-05 |

**h = 0.05**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | y\_числ | y\_аналит | | y\_числ - y\_аналит| |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0.05 | 0.28074199218711 | 0.33648396613087 | 5.57419739437624E-02 |
| 0.1 | 0.15307998394488 | 0.18191841527073 | 2.88384313258459E-02 |
| 0.15 | 0.16171944200612 | 0.17295587832961 | 1.12364363234853E-02 |
| 0.2 | 0.20149716719363 | 0.20540727779415 | 3.91011060052168E-03 |
| 0.25 | 0.24805028859532 | 0.24933441339075 | 1.28412479542966E-03 |
| 0.3 | 0.29566319057943 | 0.29607329103149 | 4.10100452062412E-04 |
| 0.35 | 0.34292472943976 | 0.34305626878057 | 1.31539340811115E-04 |
| 0.4 | 0.38941859065460 | 0.38946374223841 | 4.51515838109651E-05 |
| 0.45 | 0.43495975179495 | 0.43497854140888 | 1.87896139362542E-05 |
| 0.5 | 0.47941850398543 | 0.47942926525738 | 1.07612719429939E-05 |
| 0.55 | 0.52268005895543 | 0.52268829663467 | 8.23767923907592E-06 |
| 0.6 | 0.56463543968374 | 0.56464277929736 | 7.33961361787383E-06 |
| 0.65 | 0.60517958441526 | 0.60518649337852 | 6.90896326471790E-06 |
| 0.7 | 0.64421110886778 | 0.64421771234768 | 6.60347990366628E-06 |
| 0.75 | 0.68163244416463 | 0.68163876721747 | 6.32305284231638E-06 |
| 0.8 | 0.71735005405787 | 0.71735609296068 | 6.03890280248542E-06 |
| 0.85 | 0.75127466257070 | 0.75128040573082 | 5.74316012125209E-06 |
| 0.9 | 0.78332147572170 | 0.78332690979667 | 5.43407497233250E-06 |
| 0.95 | 0.81341039313818 | 0.81341550483785 | 5.11169967065683E-06 |
| 1 | 0.84146620818979 | 0.84147098482179 | 4.77663199349720E-06 |
| 1.05 | 0.86741879594853 | 0.86742322559800 | 4.42964946401059E-06 |
| 1.1 | 0.89120328846049 | 0.89120736006258 | 4.07160208948376E-06 |
| 1.15 | 0.91276023688101 | 0.91276394026085 | 3.70337983379709E-06 |
| 1.2 | 0.93203576006569 | 0.93203908596732 | 3.32590163210078E-06 |
| 1.25 | 0.94898167924504 | 0.94898461935561 | 2.94011057311305E-06 |
| 1.3 | 0.96355563844638 | 0.96355818541720 | 2.54697081769617E-06 |
| 1.35 | 0.97572121036169 | 0.97572335782666 | 2.14746497440021E-06 |
| 1.4 | 0.98544798739687 | 0.98544972998846 | 1.74259159091417E-06 |
| 1.45 | 0.99271165767495 | 0.99271299103759 | 1.33336263685724E-06 |
| 1.5 | 0.99749406580308 | 0.99749498660405 | 9.20800970471980E-07 |
| 1.55 | 0.99978325825157 | 0.99978376418936 | 5.05937783001897E-07 |
| 1.6 | 0.99957351323149 | 0.99957360304151 | 8.98100130930501E-08 |
| 1.65 | 0.99686535499615 | 0.99686502845392 | 3.26542234252436E-07 |
| 1.7 | 0.99166555253077 | 0.99166481045247 | 7.42078296589455E-07 |
| 1.75 | 0.98398710263349 | 0.98398594687394 | 1.15575954928726E-06 |
| 1.8 | 0.97384919743020 | 0.97384763087820 | 1.56655200511668E-06 |
| 1.85 | 0.96127717640420 | 0.96127520297530 | 1.97342889729502E-06 |
| 1.9 | 0.94630246306066 | 0.94630008768741 | 2.37537324387915E-06 |
| 1.95 | 0.92896248638426 | 0.92895971500387 | 2.77138039517233E-06 |
| 2 | 0.90930058728622 | 0.90929742682568 | 3.16046053860930E-06 |

1. *Метод Рунге-Кутты 4-го порядка*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | Runge\_numerically | Runge\_analytically | | y\_числ - y\_аналит| |
| 0 | 1 | 1 | 0.E+00 |
| 0.5 | 758.34676020229800 | 0.47942926525738 | 7.57867330937041E+02 |
| 1 | 574731.81545698100000 | 0.84147098482178 | 5.74730973985996E+05 |
| 1.5 | 435851122.01348700000000 | 0.99749498660405 | 4.35851121015992E+08 |
| 2 | 330530648693.61300000000000 | 0.90929742682568 | 3.30530648692704E+11 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | Runge\_numerically | Runge\_analytically | | y\_числ - y\_аналит| |
| 0 | 1 | 1 | 0E+00 |
| 0.25 | 37.40811023900380 | 0.24933441339075 | 3.71587758256130E+01 |
| 0.5 | 1381.67414442518000 | 0.47942926525738 | 1.38119471515992E+03 |
| 0.75 | 51338.82334366810000 | 0.68163876721747 | 5.13381417049009E+04 |
| 1 | 1908210.37592874000000 | 0.84147098482178 | 1.90820953445776E+06 |
| 1.25 | 70927068.38482990000000 | 0.94898461935561 | 7.09270674358453E+07 |
| 1.5 | 2636318923.90035000000000 | 0.99749498660405 | 2.63631892290285E+09 |
| 1.75 | 97990481137.60940000000000 | 0.98398594687394 | 9.79904811366254E+10 |
| 2 | 3642250681428.16000000000000 | 0.90929742682568 | 3.64225068142725E+12 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | Runge\_numerically | Runge\_analytically | | y\_числ - y\_аналит| |
| 0 | 1 | 1 | 0.E+00 |
| 0.125 | 1.76969762567807 | 0.16861166700864 | 1.60108595866944E+00 |
| 0.25 | 2.95299633447288 | 0.24933441339075 | 2.70366192108213E+00 |
| 0.375 | 4.81610078582450 | 0.36635734732129 | 4.44974343850321E+00 |
| 0.5 | 7.79827420445673 | 0.47942926525738 | 7.31884493919936E+00 |
| 0.625 | 12.62348419964650 | 0.58509743667818 | 1.20383867629683E+01 |
| 0.75 | 20.48406141673300 | 0.68163876721747 | 1.98024226495155E+01 |
| 0.875 | 33.34283363305540 | 0.76754350255212 | 3.25752901305033E+01 |
| 1 | 54.43017554569830 | 0.84147098482178 | 5.35887045608765E+01 |
| 1.125 | 89.06173346569750 | 0.90226759409971 | 8.81594658715978E+01 |
| 1.25 | 145.98372330983000 | 0.94898461935561 | 1.45034738690474E+02 |
| 1.375 | 239.58618982159900 | 0.98089305702316 | 2.38605296764576E+02 |
| 1.5 | 393.54423091384900 | 0.99749498660405 | 3.92546735927245E+02 |
| 1.625 | 646.80850152043200 | 0.99853134053983 | 6.45809970179892E+02 |
| 1.75 | 1063.46073661582000 | 0.98398594687394 | 1.06247675066895E+03 |
| 1.875 | 1748.92797700410000 | 0.95408578160969 | 1.74797389122249E+03 |
| 2 | 2876.65808744659000 | 0.90929742682568 | 2.87574879001976E+03 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| t | Runge\_numerically | Runge\_analytically | | y\_числ - y\_аналит| |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0.1 | 0.74822212087155 | 0.18191841527073 | 5.66303705600820E-01 |
| 0.2 | 0.61889797118284 | 0.20540727779415 | 4.13490693388695E-01 |
| 0.3 | 0.56764129876528 | 0.29607329103149 | 2.71568007733797E-01 |
| 0.4 | 0.56534464526175 | 0.38946374223841 | 1.75880903023341E-01 |
| 0.5 | 0.59282449994183 | 0.47942926525738 | 1.13395234684455E-01 |
| 0.6 | 0.63735210548553 | 0.56464277929736 | 7.27093261881732E-02 |
| 0.7 | 0.69040679444323 | 0.64421771234768 | 4.61890820955454E-02 |
| 0.8 | 0.74622183476202 | 0.71735609296068 | 2.88657418013447E-02 |
| 0.9 | 0.80084391559899 | 0.78332690979667 | 1.75170058023210E-02 |
| 1 | 0.85152542032625 | 0.84147098482178 | 1.00544355044697E-02 |
| 1.1 | 0.89633219343991 | 0.89120736006258 | 5.12483337733871E-03 |
| 1.2 | 0.93389072562320 | 0.93203908596732 | 1.85163965588309E-03 |
| 1.3 | 0.96322541137032 | 0.96355818541720 | 3.32774046878592E-04 |
| 1.4 | 0.98365386972464 | 0.98544972998846 | 1.79586026382395E-03 |
| 1.5 | 0.99471956352292 | 0.99749498660405 | 2.77542308113443E-03 |
| 1.6 | 0.99614824762707 | 0.99957360304151 | 3.42535541443512E-03 |
| 1.7 | 0.98781951059910 | 0.99166481045247 | 3.84529985336957E-03 |
| 1.8 | 0.96974774754042 | 0.97384763087820 | 4.09988333777700E-03 |
| 1.9 | 0.94206889819373 | 0.94630008768741 | 4.23118949368928E-03 |
| 2 | 0.90503058243147 | 0.90929742682568 | 4.26684439421354E-03 |

1. **Вывод**

*Часть 1*

* 1. Классический явный четырёхэтапный метод Рунге-Кутты имеет четвёртый порядок аппроксимации.
  2. Данный метод в сравнении с методами Эйлера и методом трапеций  
     дает наиболее точное значение.

*Часть 2*

* 1. Шаги, при которых методы сходятся:
     1. Простой явный метод Эйлера: 0.05, 0,025
     2. Простой неявный метод Эйлера: 0.1, 0.05, 0.025
     3. Модифицированный метод Эйлера: 0.05
     4. Метод трапеции: 0.2, 0.1, 0.05
     5. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка: 0.1

Рост погрешности при шаге больше 0,1 для метода Рунге-Кутты объясняется тем, что при таком шаге разбиения не выполняется условие устойчивости метода, следовательно метод не сходится.